

O KORIŠĆENJU PROGRAMSKOG PAKETA WOLFRAM MATHEMATICA ZA UNAPREĐENJE RAZUMEVANJA MEHANIKE KOD STUDENATA MAŠINSKOG INŽENJERSTVA

Miodrag Zuković¹, Ivana Kovačić², Livija Cvetičanin³

^{1,2,3}Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija

¹zukovic@uns.ac.rs, ²ivanakov@uns.ac.rs, ³cveticanin@uns.ac.rs

Kratak sadržaj: U ovom radu je istaknut značaj primene software-a Wolfram Mathematica pri obuci Mehanike (posebno Dinamike) studentima tehnike. Prikazan je proračun, vizuelizacija i simulacija kretanja za primere kretanja tela u Dinamici. Ukazano je na prednosti programa Mathematica za rešavanje problema u Mehanici.

Ključne reči: Wolfram Mathematica, Mehanika, Mašinsko inženjerstvo

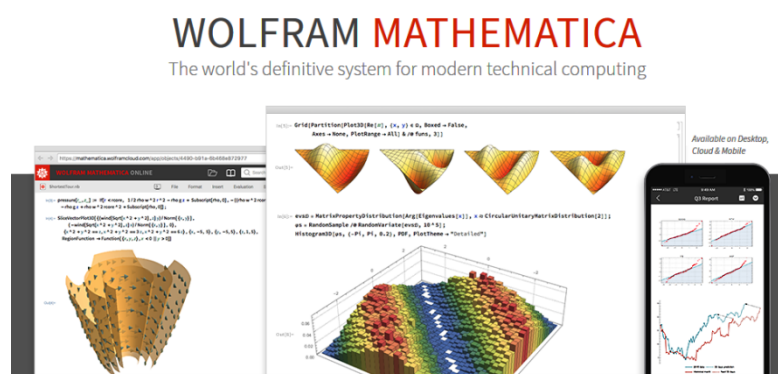
ON THE USE OF A SOFTWARE PACKAGE WOLFRAM MATHEMATICA FOR IMPROVING COMPREHENSION OF MECHANICS AMONG THE STUDENTS OF MECHANICAL ENGINEERING

Abstract: In this paper, the importance of using a software package Wolfram Mathematica in education of Mechanics (especially Dynamics) for students of Engineering is pointed out. Calculations, vizualizations and simulations of motion are presented in temrs of a few examples of dynamical systems. Advantages of the approach in which this software package is used for problems in Mechanics are noted.

Key Words: Wolfram Mathematica, Mechanics, Mechanical engineering

1. UVOD

Program Wolfram Mathematica (Slika 1), koji se često naziva samo Mathematica, je tehnički savremen sistem računanja pogodan za primenu u tehnici, inženjerstvu, prirodnim, pa čak i društvenim naukama, finansijama a posebno u obrazovanju. Prvi software je sačinio Stefan Wolfram 1988. godine, a razvila ga je firma Wolfram Research iz Ilinoisa, SAD. Zasnovan je na principu Computer Algebra System (CAS) koji integriše programe za računanje, pravljenje slika, simulacija, animacija itd. u jednu celinu (Slika 1).



Slika 1. Wolfram Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav>)

Razumevanje teorijske i primenjene mehanike je od ključnog značaja za razumevanje kurseve inženjerstva kao što projektovanje i konstruisanja, a sada za i kibernetko fizička postrojenja. Da bi se omogućilo što jednostavnije, a istovremeno temeljno, upoznavanje studenata sa fenomenima iz Mehanike posebnu pogodnost daje primena programa Mathematica. Tako Mathematica omogućuje studentima da reše jednostavne probleme Mehanike koji mogu demonstrirati i formalizme poput Lagranžijana ili Hamiltonijana, ali omogućuje i rešavanje znatno težih problema. Kako ovi programi mogu da reše probleme simbolički, ono što je jedanput definisano ostaje nepromenjeno (dovoljno je napisati svega jedanput) i može se koristiti neograničen broj puta. Tako, zapisati Lagranževu jednačinu druge vrste u Mathematici zahteva dosta vremena (znatno više nego ručno na papiru), ali pri rešavanju narednih zadataka korisnici Mathematice treba da unesu samo novi izraz za kinetičku i potencijalnu energiju kao i generalisanu silu. Mathematica će automatski generisati diferencijalne jednačine kretanja po zadatom algoritmu. Pored toga, primena Mathematice za slučaj ulaznih podataka u vidu brojeva, daje ogromnu prednost u odnosu na ručno računanje s obzirom na vreme trajanja računanja.

Mathematica ne mora da se koristi kao isključivi način za rešavanje problema iz Mehanike. Može se koristiti i uz rad „peške“: deo računanja se obavlja olovkom na papiru, a deo na računaru. Postoji više mogućnosti: a) program Mathematica se primeni pre ručnog računanja, b) koristi se software posle ručnog računanja da bi se proverila tačnost rešenja ili c) koristi se kombinacija ručnog i mašinskog računanja i to najčešće u slučaju ako problem nema tačno analitičko rešenje (radi se ručno dok se ne dođe do nivoa kada je moguće dobiti samo aproksimativno analitičko rešenje, pa je preporučljivo numeričko rešavanje).

Mathematica skraćuje vreme računanja, a pruža mogućnost koncentracije na analizu i interpretaciju rešenja. Zahvaljujući vizuelizaciji koju daje Mathematica, problem postaje pitkiji i shvatljiviji za razumevanje. Pored toga, simulacija kretanja u mnogome doprinosi razumevanju fenomena u Mehanici.

Problemom primene programa Mathematica u Mehanici bavi se veliki broj nastavnika. Tako u knjizi [1] Baumann razmatra teoretske problem Mehanike rađenu uz program Mathematica. Boccara [2] prikazuje neke osnovne primere Mehanike urađene sa ovim software-om.

Ali i dalje ostaje pitanje kako sve to da se primeni u obrazovanju. Tada je neophodno da se koncentriše pažnja na metode kao esencijalne delove edukacije. Važnost tih metoda je pokazana u [3].

Cilj ovog rada je da prikaže primer primene licenciranog programa Mathematica za rešavanje problema iz Dinamike namenjene studentima tehničkih fakulteta. Ovaj program je nabavljen u okviru projekta čiji je akronim Mech-in-NS [4], koji se finansira od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije u okviru programske aktivnosti „Razvoj visokog obrazovanja“, a u koji su uključeni autori ovog rada.

2. IZRADA MATEMATIČKIH MODELA MEHANIČKIH SISTEMA I NJIHOVO REŠAVANJE

Svaki inženjer, kao i svaki student, zna da posao formiranja matematičkog modela, odnosno, diferencijalnih jednačina kretanja nekog mehaničkog sistema može biti veoma dugotrajan i zametan posao. Wolfram Mathematica sa svojim alatima za simboličko računanje predstavlja veliku pomoć u tom smislu. Na Slici 2 prikazan je kod za formiranje Lagranževih jednačina kretanja sistema za mehanički sistem koga čini dvojno matematičko klatno. Ovaj sistem ima dva stepena slobode i njegovo kretanje je opisano dvema diferencijalnim jednačinama. Da bi se došlo do ovih jednačina, potrebno je definisati kinetičku i potencijalnu energiju sistema, a zatim sprovesti odgovarajuća diferenciranja (ovaj korak predstavlja najzamorniji deo pri radu „peške“), gde upotreba računara dolazi do svog punog izražaja.

$$\begin{aligned} \text{In}[1] = & \text{Ek} = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi}^2)^2 + \frac{1}{2} M ((l \dot{\varphi}^2)^2 + (L \dot{\psi}^2)^2 + 2 (l \dot{\varphi}^2) (L \dot{\psi}^2) \cos[\psi[t] - \varphi[t]]); \\ \text{Ep} = & -m g l \cos[\varphi[t]] - M g (l \cos[\varphi[t]] + L \cos[\psi[t]]); \\ \text{jednacina1} = & D[D[\text{Ek}, \varphi'[t]], t] - D[\text{Ek}, \varphi[t]] = -D[\text{Ep}, \varphi[t]] \\ \text{jednacina2} = & D[D[\text{Ek}, \psi'[t]], t] - D[\text{Ek}, \psi[t]] = -D[\text{Ep}, \psi[t]] \\ \text{Out}[3] = & l L m \sin[\varphi[t] - \psi[t]] \varphi'[t] \psi'[t] + l^2 m \varphi''[t] + \frac{1}{2} M (-2 l L \sin[\varphi[t] - \psi[t]] (\varphi'[t] - \psi'[t]) \psi'[t] + 2 l^2 \varphi''[t] + 2 l L \cos[\varphi[t] - \psi[t]] \psi''[t]) = \\ & -g l m \sin[\varphi[t]] - g L M \sin[\psi[t]] \\ \text{Out}[4] = & -l L M \sin[\varphi[t] - \psi[t]] \varphi'[t] \psi'[t] + \frac{1}{2} M (-2 l L \sin[\varphi[t] - \psi[t]] \varphi'[t] (\varphi'[t] - \psi'[t]) + 2 l L \cos[\varphi[t] - \psi[t]] \varphi''[t] + 2 l^2 \psi''[t]) = -g L M \sin[\psi[t]] \end{aligned}$$

Slika 2. Formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema

Treba napomenuti da se prikazani algoritam može primeniti, uz male korekcije, i na druge slične mehaničke sisteme. Isto tako, ovaj postupak se dalje može uopštiti i automatizovati, primenom alata simboličkog programiranja, i primeniti na složenije sisteme i sisteme sa više stepeni slobode. Dobijene jednačine su formirane u obliku koji omogućava dalju obradu, odnosno, direktno dobijanje analitičkog ili numeričkog rešenja.

$$\begin{aligned} \text{In}[5] = & \text{NDSolve}[\{\text{jednacina1}, \text{jednacina2}, \varphi[0] = \frac{\pi}{6}, \varphi'[0] = 0, \psi[0] = \frac{\pi}{3}, \psi'[0] = 0\} \\ & /. \{m \rightarrow 1, M \rightarrow 1, l \rightarrow 1, L \rightarrow 1, g \rightarrow 9.81\}, \{\varphi, \psi\}, \{t, 0, 10\}] \\ \text{Out}[5] = & \{\{\varphi \rightarrow \text{InterpolatingFunction}[\text{Domain: } \{(0., 10.)\} \text{ Output: scalar}], \psi \rightarrow \text{InterpolatingFunction}[\text{Domain: } \{(0., 10.)\} \text{ Output: scalar}]\}\} \end{aligned}$$

Slika 3. Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja

Diferencijalne jednačine datog sistema su nelinearne diferencijalne jednačine i one nemaju analitičko rešenje (relativno malim korekcijama algoritma formiranja jednačina kretanja može se izvršiti njihova linearizacija, koja omogućava i analitičku analizu). Da bi se odredilo kretanje sistema potrebno je izvršiti njihovu numeričku integraciju. Jedna od veoma bitnih funkcija Wolfram Mathematica programa, funkcija NDSolve, omogućava da se ovaj problem reši (Slika 3). Funkcija NDSolve je funkcija koja u sebi sadrži veliki broj algoritama i metoda za numeričko rešavanja diferencijalnih jednačina. Pored toga što rešava početni problem običnih diferencijalnih jednačina, pomoću ove funkcije mogu se rešavati i granični problemi Mehanike, kao i sistemi diferencijalno algebarskih jednačina i parcijalne diferencijalne jednačine.

Na predavanjima i vežbama iz grupe predmeta Mehanika, najčešće se prikazuju primeri mehaničkih sistema koji imaju analitička rešenja. Mnogi mehanički sistemi, čak i oni jednostavniji, modelirani su nelinearnim, algebarskim ili diferencijalnim, jednačinama. Primena programskog paketa Wolfram Mathematica u nastavi omogućava da se, na licu mesta, pokaže kako se ovi problemi rešavaju i da se na slikovit način analizira i prikaže to rešenje.

3. ANALIZA REŠENJA I VIZUALIZACIJA

Nakon rešavanja matematičkog modela, predstoji analiza dobijenog rešenja i njegova prezentacija. Ovaj bitan korak umnogome može olakšati upotreba programa Wolfram Mathematica.

Mathematica poseduje veliki broj funkcija za rad sa listama (vektori, matrice, tenzori višeg reda), među kojima je i funkcija Table, koja omogućava formiranje lista i tabela, kao i njihov jednostavan prikaz (Slika 4a).

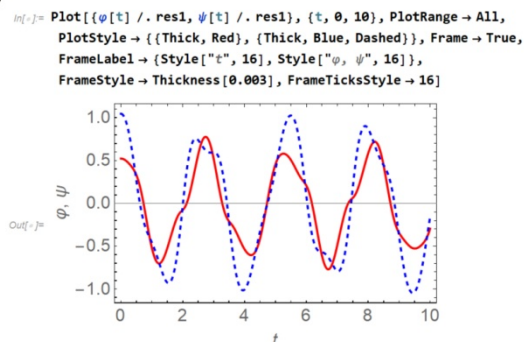
a)

```
In[8]:= TableForm[Table[{t,  $\varphi$ [t],  $\psi$ [t]} /. res1[[1]],  
{t, 0, 0.5, 0.1}],  
TableHeadings -> {None, {"t", " $\varphi$ ", " $\psi$ "}}]
```

Out[8]/TableForm=

t	φ	ψ
0.	0.523599	1.0472
0.1	0.514006	1.01317
0.2	0.48761	0.910823
0.3	0.449653	0.741524
0.4	0.401435	0.515877
0.5	0.331208	0.263827

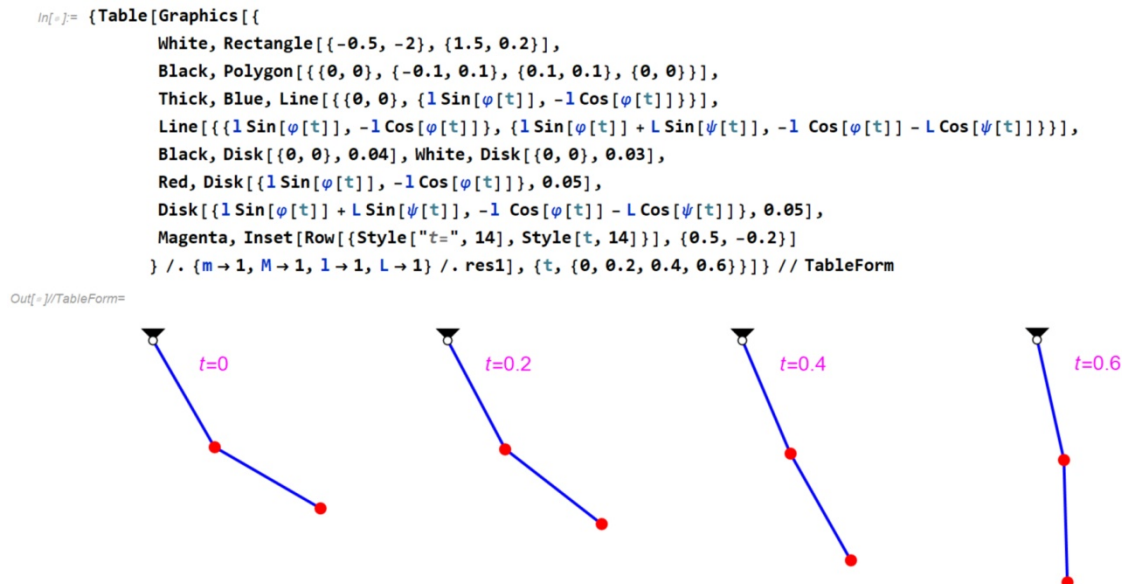
b)



Slika 4. Obrada podataka: a) tabelarni prikaz rešenja jednačina kretanja, b) grafički prikaz rešenja

Veliki broj funkcija za grafičku obradu podataka (Plot, Plot3D, ParametricPlot, ContourPlot,...) obezbeđuje korisniku široke mogućnosti za analizu i prikaz dobijenih rešenja u obliku dijagrama, odnosno, grafika (Slika 4b). Dobijeni dijagrami mogu se snimiti u različitim formatima (jpg, wmf, emf, pdf,...) ili izvesti u druge programe, gde se, ukoliko je potrebno, mogu dalje obrađivati.

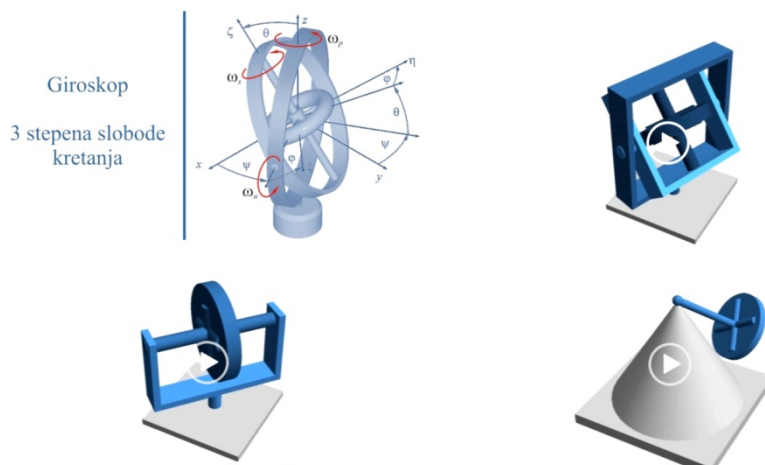
Veliki broj grafičkih objekata (Line, Disk, Rectangle, Polygon,...) pruža mogućnost da se analizirani mehanički sistemi i prikažu (Slika 5). Isto tako, program omogućava animamaciju kretanja sistema i zapis istih u različitim formatima (avi, gif, mp4,...).



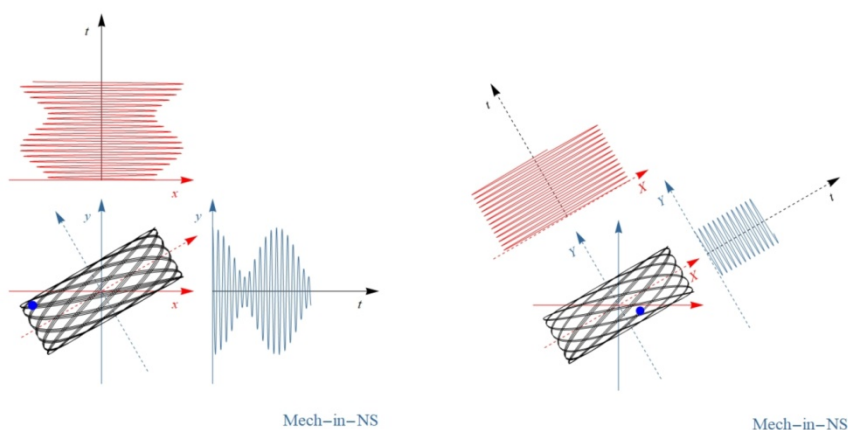
Slika 5. Grafički prikaz sistema u nekoliko različitih trenutaka vremena

Programski paket Wolfram Mathematica je obilato korišten pri izradi Galerije (Slika 6, Slika 7), na web-portalu formiranom u okviru projekta Mech-In-NS [4], koji je kreiran u okviru projekta „Multimedijalna i interaktivna nastava i učenje Inženjerske mehanike“, podržanom od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije, a čija dorada je nastavljena u okviru projekta „Inoviranje grupe predmeta iz oblasti Inženjerske mehanike kroz upotrebu IT tehnologija, kreiranje multimedijalnih sadržaja i saradnju sa privredom“. Galerija sadrži originalne multimedijalne forme kojima student imaju slobodan pristup, a koje im na

kreativan i original način pružaju uvid u ponašanje i karakteristike različitih mehaničkih sistema. Mogućnost slobodnog pristupa sa široke klase uređaja (mobilnog telefona, tableta, laptopa, PC računara), omogućuje studentima daljinski pristup ovim kratkim digitalnim formama, dakle pruža im mogućnost učenja na daljinu. Mogućnost da ih koriste u širokoj klasi video plejera, omogućuje studentima da ih pažljivo analiziraju, zaustavljaju u određenim trenucima i ponovno aktiviraju, pomažući im u razumevanju analiziranog mehaničkog ponašanja ili mehaničkih karakteristika. Osim toga, ove forme daju direktan doprinos da se studentima na efektan način prikažu brojni primeri praktičnih problema čije principe funkcionisanja izučavanju teorijski na kursovima Mehanike, te da se na direktan način ukaže na značaj poznavanje teorije za dobijanje određenog mehaničkog stanja (mirovanja ili kretanja).



Slika 6. Primer iz Galerije web-portala „Mech-in-NS“



Slika 7. Primer iz Galerije web-portala „Mech-in-NS“

4. ZAKLJUČAK

U ovom radu je pokazano kako se programski paket WolframMathematica može primeniti za pomoć studentima u savladavanju gradiva i bolje razumevanje Mehanike (posebno Dinamike). Proračun, vizuelizacija i simulacija koju omogućuje ovaj program pruža mogućnost boljeg i temeljnijeg savladavanja pojmova, kao i rešavanje i analizu problema iz Mehanike, te formiranje multimedijalnih formi koje se mogu korsistiti za učenje na daljinu.

5. LITERATURA

- [1] Baumann, G., *Mathematica for Theoretical Physics – Classical Mechanics and Nonlinear Dynamics*, 2nd ed. Springer, 2005.
- [2] Boccara, N., *Essentials of Mathematica (with Applications to Mathematics and Physics)*, Springer, 2007.
- [3] Kusak, R., *Applications of Wolfram Mathematica in the Theoretical Mechanics*, WDS'12, Proceedings of Contributed Papers, Part III, 88-92, 2012.
- [4] Internet stranica <http://www.mech-in-ns.ftn.uns.ac.rs>.