

VIZUELIZACIJA I ANALIZA REŠENJA ZADATAKA MEHANIKE
POMOĆU PROGRAMSKOG PAKETA MATHEMATICAAleksandar Okuka¹, Nenad Grahovac², Miodrag Žigić³^{1,2,3}Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija¹aokuka@uns.ac.rs, ²ngraho@uns.ac.rs, ³mzigic@uns.ac.rs

Kratak sadržaj: U ovom radu predstavljene su neke od mogućnosti programskog paketa Mathematica za vizuelizaciju rešenja zadataka mehanike, koje mogu značajno doprineti analizi samih rešenja. Pored predstavljanja rešenja u obliku 2D i 3D prikaza, moguće je generisati i simulacije kretanja, što se se pokazalo izuzetno korisnim za edukativne svrhe. Mogućnost rotiranja dobijenog rešenja u obliku 3D objekta, ili interaktivno prikazivanje rešenja menjanjem vrednosti određenih parametara sistema su od izuzetne vrednosti pri analizi. Budući da je mehanika nauka o kretanju i deformacijama tela pod dejstvom sila, kao i da se modeliranje u mehanici vrši pomoću matematike, programski paket Mathematica predstavlja alat od velike važnosti pri analizi problema u mehanici.

Ključne reči: Mathematica, analiza rešenja, mehanika

VISUALIZATION AND ANALYSIS OF THE SOLUTIONS TO THE PROBLEMS
IN MECHANICS BY USE OF MATHEMATICA

Abstract: In this paper we presented some possibilities of Mathematica software for visualization of the solutions to the problems in mechanics, which can significantly contribute to the analysis of the solutions. Besides presentations of the solutions in the form of 2D and 3D images, it is possible to generate simulations of motion, which can be very useful for educational purposes. The possibility of rotation of the obtained solution in the form of 3D object, as well as an interactive presentation of the solution by changing the values of some parameters, is very important during investigation. Since mechanics is the science concerned with the motion and deformation of bodies under the action of forces, and modelling in mechanics is performed by use of mathematics, Mathematica software represents significant tool for the analysis of the problems in mechanics.

Key Words: Mathematica, solution analysis, mechanics

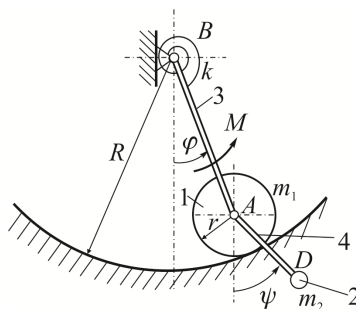
1. UVOD

Inženjerski posao se u današnje vreme ne može zamisliti bez primene savremenih softverskih alata za simbolička i numerička izračunavanja. Ovi alati se iz dana u dan usavršavaju i proširuju sa novim mogućnostima pa je važno pratiti njihov razvoj. Oni takođe imaju veliku primenu u naučnom istraživanju, a sve više se koriste i u obrazovne svrhe. Programski paket Mathematica je moćan alat koji se koristi u nauci i inženjerstvu, posebno zbog svojih mogućnosti za simbolička i numerička izračunavanja, interfejsom fokusiranim na dokumente i mogućnošću onlajn pristupa velikom broju najnovijih algoritama. Mathematica pruža veoma efikasnu platformu za generisanje, dokumentovanje i analizu složenih simulacija, [1]. U ovom programskom paketu grafički objekti su potpuno integrisani u njegov dinamički interaktivni jezik, pa se svaka vizuelizacija može animirati ili učiniti interaktivnom pomoću određene komande.

U savremenom obrazovnom procesu digitalne tehnologije imaju sve veću primenu, a pomoću njih se gradivo može približiti studentima lakše, brže i efikasnije. Stvaranje interaktivnih vizuelnih modela pomoću Mathematice omogućava studentima da istraže teže razumljive probleme, da primene teorijska znanja na konkretne probleme, te da bolje razumeju predavano gradivo. Primena ovog programskog paketa u nastavi mehanike studentima tehničkih fakulteta prikazana je u radu [2]. Ovde će se predstaviti još neke od mogućnosti programskog paketa Mathematica za vizuelizaciju rešenja zadataka mehanike, što je često od velikog značaja pri analizi samih rešenja.

2. PRIMERI ANALIZE REŠENJA ZADATAKA MEHANIKE

U ovom poglavlju prikazaće se grafičke mogućnosti softvera Mathematica, koje obuhvataju uticaj promene vrednosti parametara sistema na dobijeno rešenje, animaciju kretanja mehaničkog sistema i mogućnost rotiranja dobijenog rešenja u obliku 3D objekta. Za mehanički sistem prikazan na Slici 1, koji je opisan u nastavku, izvedene su diferencijalne jednačine kretanja, koje su zatim rešene numerički, a rešenje je prikazano i analizirano, [3].



Slika 1. Mehanički sistem

Homogeni disk 1 mase m_1 i radijusa r , kotrlja se bez klizanja po cilindričnoj površini radijusa R . Disk je vezan zgloбно za štap 3, na koji deluje spreg momenta M . Na svom drugom kraju, u tački B , za štap je vezana torziona opruga krutosti k , a štap je na tom mestu zgloбно vezan za nepokretni oslonac. Za disk 1 u tački A je vezan štap 4 dužine l , na čiji drugi kraj u tački D je pričvršćen teret 2 mase m_2 , koji se može smatrati materijalnom tačkom. U početnom trenutku oba štapa su vertikalna, opruga nenapregnuta, a sistem je mirovao. Formirati diferencijalne jednačine kretanja sistema i rešiti ih za proizvoljno izabrane vrednosti parametara sistema. Mase štapova zanemariti.

Za rešavanje ovog problema napisane su kinetička i potencijalna energija i generalisane sile nepotencijalnih dejstava, i pomoću Lagranževih jednačina druge vrste u *Mathematici* su formirane diferencijalne jednačine kretanja sistema, kao što je prikazano na Slici 2.

```

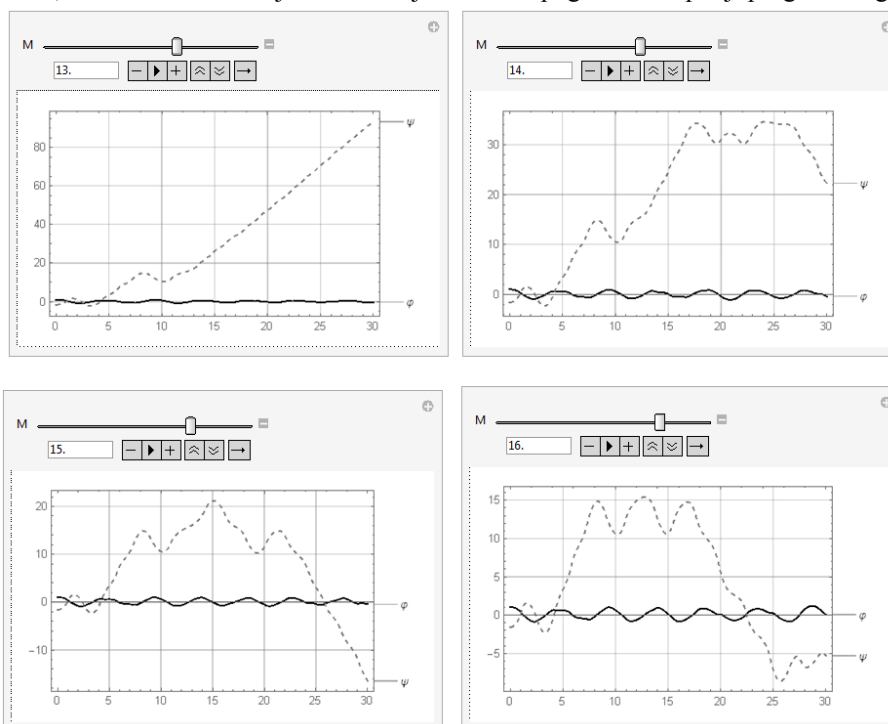
In[17]:= FullSimplify[D[(D[phi1'[t] Ek[t]), t] - D[Ek[t], phi1[t]] + D[Pi[t], phi1[t]] == M * Cos[w * t]]
FullSimplify[D[(D[phi2'[t] Ek[t]), t] - D[Ek[t], phi2[t]] + D[Pi[t], phi2[t]] == 0]

Out[17]:= k phi1[t] == M Cos[t w] + 1/2 (r - R1) (2 g (m1 + m2) Sin[phi1[t]] + 2 m2 R2 Sin[phi1[t] - phi2[t]] phi2'[t]^2 -
(3 m1 + 2 m2) (r - R1) phi1''[t] + 2 m2 R2 Cos[phi1[t] - phi2[t]] phi2''[t])

Out[18]:= m2 R2 (g Sin[phi2[t]] + (r - R1) (Sin[phi1[t] - phi2[t]] phi1'[t]^2 - Cos[phi1[t] - phi2[t]] phi1''[t]) + R2 phi2''[t]) == 0
    
```

Slika 2. Diferencijalne jednačine kretanja

Pomoću komande NDSolve, i za izabrane vrednosti parametara sistema i početnih uslova, dobijeno je rešenje diferencijalnih jednačina kretanja. Za grafički prikaz dobijenog rešenja korišćena je komanda Plot, dok je za analizu uticaja jednog parametra, intenziteta M sprega sila, na dobijeno rešenje korišćen interaktivni objekat pomoću komande Manipulate, Slike 3 i 4. Za detalje o korišćenju komandi pogledati Help fajl programskog paketa, kao i [4].

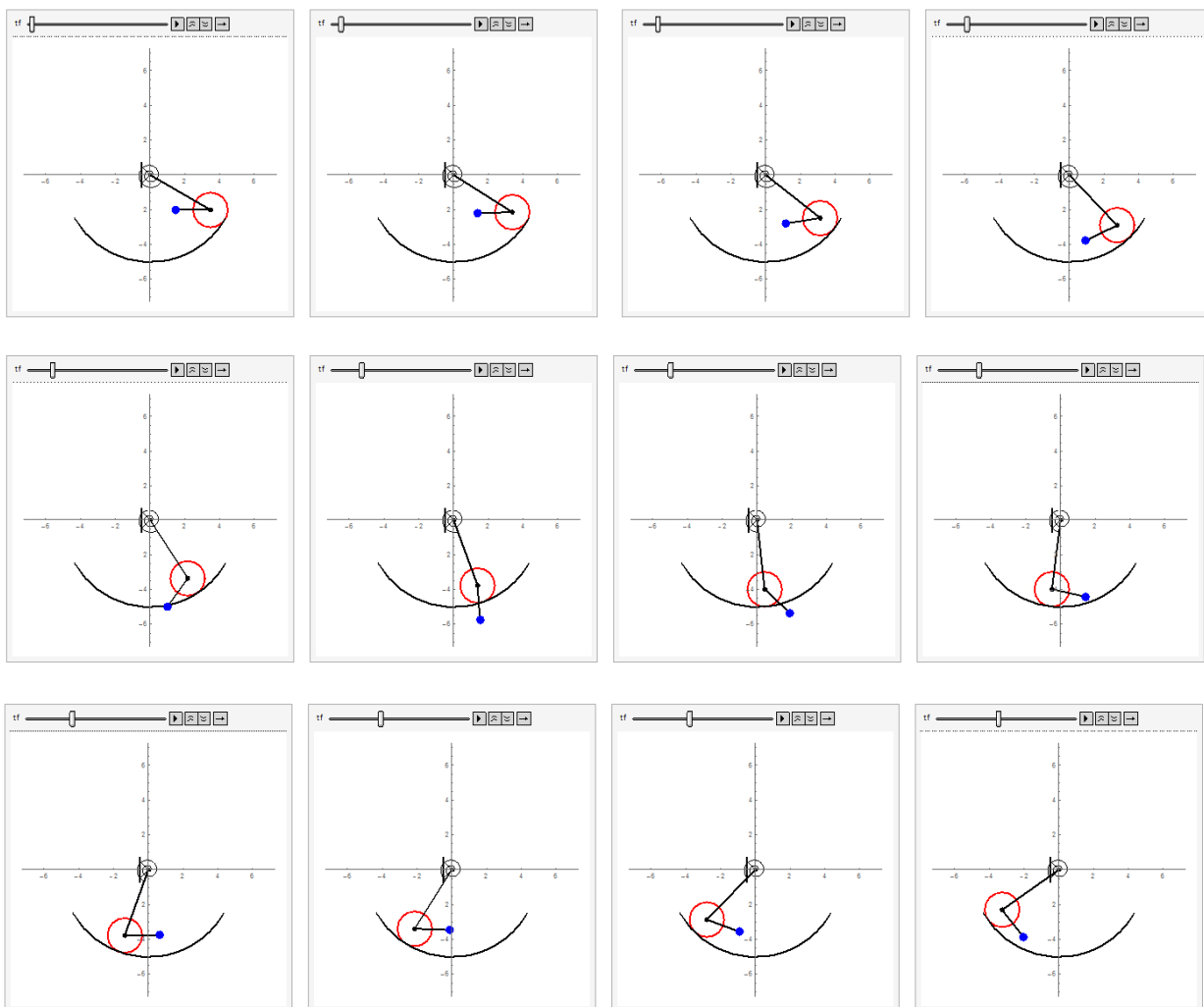


Slika 3. Grafici funkcija $\phi(t)$ i $\psi(t)$ dobijeni pomoću komande Manipulate, prikazani za različite vrednosti intenziteta M sprega sila

```
Manipulate[
Plot[{{Evaluate[ $\theta_1[t]$  /. NDSolve[{{ $k \theta_1[t] = M \cos[t w] + \frac{1}{2} (r - R_1) (2 g (m_1 + m_2) \sin[\theta_1[t]] + 2 m_2 R_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_2'[t]^2 - (3 m_1 + 2 m_2) (r - R_1) \theta_1''[t] + 2 m_2 R_2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_2''[t])$ },
m2 R2 (g Sin[ $\theta_2[t]$ ] + (r - R1) (Sin[ $\theta_1[t] - \theta_2[t]$ ]  $\theta_1'[t]^2 - \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_1''[t]) + R_2 \theta_2''[t]) = 0$ ,
 $\theta_1[0] == \theta_{10}$ ,  $\theta_1'[0] == \theta_{1d0}$ ,  $\theta_2[0] == \theta_{20}$ ,  $\theta_2'[0] == \theta_{2d0}$ },
{ $\theta_1$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_2'$ }, {t, 0, 30}]},
Evaluate[ $\theta_2[t]$  /. NDSolve[{{ $k \theta_1[t] = M \cos[t w] + \frac{1}{2} (r - R_1) (2 g (m_1 + m_2) \sin[\theta_1[t]] + 2 m_2 R_2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_2'[t]^2 - (3 m_1 + 2 m_2) (r - R_1) \theta_1''[t] + 2 m_2 R_2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_2''[t])$ },
m2 R2 (g Sin[ $\theta_2[t]$ ] + (r - R1) (Sin[ $\theta_1[t] - \theta_2[t]$ ]  $\theta_1'[t]^2 - \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_1''[t]) + R_2 \theta_2''[t]) = 0$ ,
 $\theta_1[0] == \theta_{10}$ ,  $\theta_1'[0] == \theta_{1d0}$ ,  $\theta_2[0] == \theta_{20}$ ,  $\theta_2'[0] == \theta_{2d0}$ },
{ $\theta_1$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_2'$ }, {t, 0, 30}]]],
{t, 0, 30}, PlotLabels -> {" $\theta$ ", " $\psi$ "},
PlotStyle ->
{{Black, Thickness[0.005]},
{Gray, Dashed, Thickness[0.005]}},
Frame -> True, GridLines -> Automatic], {M, 1, 20}]
```

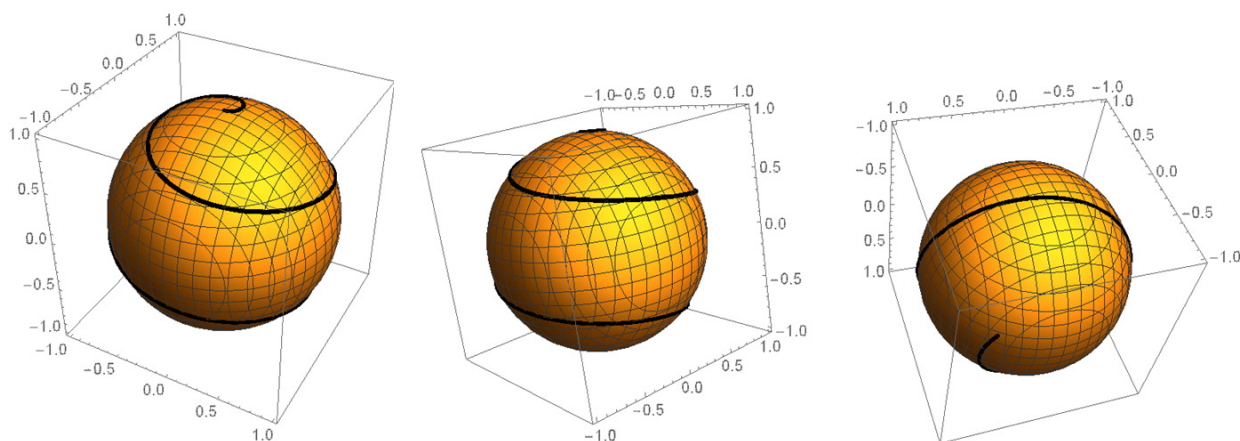
Slika 4. Primena komande Manipulate zajedno sa komandama NDSolve i Plot

Na osnovu dobijenog rešenja u *Mathematici* je moguće napraviti simulaciju kretanja sistema, za šta se mogu koristiti standardni grafički objekti, kao što su linija, disk, tačka, i drugi, koji su definisani u programu. Za animaciju je korišćena komanda Animate, a na Slici 5 je prikazan niz položaja sistema u različitim trenucima sa malim vremenskim korakom.



Slika 5. Simulacija kretanja sistema pomoću komande Animate

Za grafičko prikazivanje rešenja, osim komande Plot, koja služi za dobijanje dvodimenzijских prikaza, mogu se koristiti i komande Plot3D, ParametricPlot3D, ContourPlot3D, ListPlot3D, koje služe za trodimenzijски prikaz. Na Slici 6 prikazano je kretanje tačke po sferi pri čemu je sfera nacrtana primenom ContourPlot3D a trajektorija tačke pomoću komande ParametricPlot3D, pa su sfera i trajektorija prikazane na zajedničkoj slici primenom komande Show, [3]. Na Slici 6 prikazane su sfera i trajektorija tačke posmatrane iz tri različita položaja. Kada se u *Mathematici* generiše trodimenzijски objekat, moguće ga je rotirati i posmatrati iz različitih uglova pomoću miša. To doprinosi jednostavnijem sagledavanju i analizi dobijenog rešenja. U Help fajlu nalaze se detaljna objašnjenja svih komandi, kao i brojni primeri primene. Pored toga, prikazane su i dodatne opcije koje se mogu koristiti uz



Slika 6. Trodimenzijski prikaz kretanja tačke po sferi i rotacija trodimenzijskog grafičkog objekta

odgovarajuću komandu. Takođe, pored objašnjenja i primera koji se odnose na željenu komandu, prikazan je i spisak drugih komandi koje su u uskoj vezi sa njom i čijim uputstvima za korišćenje se može jednostavno pristupiti.

3. ZAKLJUČAK

Pomoću prikazanih primera predstavljene su izuzetne grafičke mogućnosti programskog paketa *Mathematica* koje imaju značajan doprinos razumevanju i analizi kretanja složenih mehaničkih sistema. Vizuelizacijom koju omogućava ovaj softver može u velikoj meri da se unapredi nastavni proces. *Mathematica* predstavlja izuzetno moćan i koristan alat i treba je posmatrati kao sredstvo za rešavanje i analizu postavljenog problema. I pored svih mogućnosti koje *Mathematica* nudi, u slučaju da korisnik ne razume i ne poznaje dobro teorijske osnove postavljenog zadatka, tačnost dobijenih rešenja je pod znakom pitanja.

Istraživanje je podržano od strane Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, Projekat broj 2020-054 (Primene novih IT tehnologija u nastavi mehanike).

4. LITERATURA

- [1] Nenad Grahovac, Miodrag Žigić, *Analiza i simulacije u inženjerstvu primenom softverskog paketa Mathematica*, XXV Skup Trendovi razvoja: Kvalitet visokog obrazovanja, Kopaonik, 11.-14. 02.2019.
- [2] Miodrag Zuković, Ivana Kovačić, Livija Cvetičanin, *O korišćenju programskog paketa Wolfram Mathematica za unapređenje razumevanja mehanike kod studenata mašinskog inženjerstva*, XXV Skup Trendovi razvoja: Kvalitet visokog obrazovanja, Kopaonik, 11.-14. 02.2019.
- [3] Miodrag Žigić, Nenad Grahovac, *Mathematica u zadacima mehanike*, Fakultet Tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, Srbija, 2019.
- [4] Eugene Don, *Schaum's Outline of Mathematica*, Mc Graw-Hill, USA, 2009.