

PRIMENA GEOGEBRE U NASTAVI MATEMATIKE

Radoslav Božić¹, Jovana Dedeić², Srđan Milićević³, Ilija Kovačević⁴

¹Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, Srbija

^{2,3,4}Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija

¹radoslav.bozic@gmail.com, ²radenovicj@uns.ac.rs, ³srđjan.milicevic88@gmail.com, ⁴ilijak@uns.ac.rs

Kratak sadržaj: U radu su prikazani rezultati istraživanja koje se bazira na primeni savremenih tehnologija u nastavi matematike na univerzitetskom nivou. Istraživanje se zasnivalo na kombinovanju različitih nastavnih metoda, sa ciljem unapređenja kvaliteta znanja studenata u oblasti realnih funkcija i njihovih osobina. Metoda kolaborativnog rada u nastavi i njena primena bila je i ostala tema brojnih istraživanja, kao i implementacija savremene tehnologije u nastavni proces. Konkretno, opisane su nastavne metode koje se zasnivaju na primeni dinamičkog softvera GeoGebra u ispitivanju osobina funkcija, odnosno klasa funkcija, kombinovane sa metodama individualnog rada studenata.

Ključne reči: Matematika, savremene tehnologije, GeoGebra

THE APPLICATION OF GEOGEBRA IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract: This paper presents the results of a research based on the application of modern technologies in mathematics teaching at the university level. The research was based on combining different teaching methods, with the aim of improving the quality of students' knowledge in the field of real functions and their properties. Collaborative teaching methods and their application have been the topic of numerous studies, as the implementation of modern technology in the teaching process. In particular, in the paper, we described teaching methods based on the application of GeoGebra dynamic software in examining feature properties, combined with individual students' work methods.

Keywords: Mathematics, modern technologies, GeoGebra

1. UVOD

Unapređivanje nastavnog procesa primenom savremene tehnologije podstaklo je veliki broj istraživanja u poslednjih nekoliko decenija. Osmišljen je veliki broj programskih paketa, aplikacija za pametne telefone i kompletnih uređaja namenjenih primeni u obrazovanju. Takođe, mnogi programski paketi, kojima to nije bila primarna namena, našli su svoje mesto u savremenim obrazovnim sistemima, tako da su neki od njih razvijani u tom smeru. Neophodno je bilo prilagoditi nastavne programe savremenim nastavnim metodama, koje podrazumevaju primenu savremene tehnologije. Izrada odgovarajućih pedagoško – didaktičkih materijala bila je neophodna kako za studente, tako i za nastavnike. Mnogi obrazovni sistemi, širom sveta, prolazili su kroz proces reforme, čiji je cilj bio prilagođavanje obrazovnih sistema potrebama savremenog društva, ali i formiranje obrazovnih sistema koji bi, u budućnosti, mogli znatno brže i lakše da se modernizuju nego što je to bio slučaj u prošlosti. Modernizacija jednog obrazovnog sistema, pored vremena, koje je neophodno za sprovođenje potrebnih istraživanja, stručnog usavršavanja nastavnog kadra i opremanja obrazovnih ustanova, zahteva i značajna finansijska sredstva. To je jedan od razloga zbog koga modernizacija pojedinih obrazovnih sistema još uvek nije dostigla željeni nivo.

Realne funkcije su jedan od sadržaja u nastavi matematike, na univerzitetskom nivou obrazovanja, i često su bile predmet pomenutih istraživanja. Neophodno je da studenti usvoje znanja iz oblasti funkcija. Naročito je značajno da razumeju osobine funkcija, kako bi kasnije mogli uspešno da ih primenjuju. U nastavi se, najvećim delom, izučavaju elementarne funkcije i njihove osobine. Praksa je, kao i brojna istraživanja, pokazala da studenti imaju poteškoća sa razumevanjem ovih osobina, te da često prave greške prilikom ispitivanja najvažnijih osobina funkcije, što za posledicu može imati nedovoljnu osposobljenost studenata za kasniju primenu stečenog znanja iz ove oblasti (Anabousy, Daher, Baya'a & Abu-Naja, 2014; Borba & Confrey, 1996). Dakle, brojni su razlozi za sprovođenje istraživanja u cilju poboljšanja kvaliteta znanja studenata u oblasti funkcija. Funkcija kao matematički sadržaj nalazi primenu u drugim naukama, kao što su: fizika, hemija, tehničke nauke, ekonomija, modeliranje pojava i rešavanje problema iz svakodnevnog života. Zbog potreba za primenom, neophodno je da studenti ovladaju znanjem u oblasti funkcija i njihovih osobina. Funkcije predstavljaju značajan nastavni sadržaj u matematici jer je, osim primene u drugim naukama i modeliranju realnih problema, značajna i njihova primena u izučavanju drugih matematičkih sadržaja. Ranija istraživanja su pokazala da studenti, bez obzira na nivo obrazovanja, kada je u pitanju ispitivanje osobina funkcija, imaju najviše poteškoća u radu sa funkcijama sa promenljivim parametrima, kao i sa transformacijama funkcija (Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015). Osposobljenost studenata za rad sa funkcijama sa parametrima, a naročito poznavanje uticaja vrednosti parametara na osobine funkcija je od značaja za razumevanje osobina funkcije i pojma funkcije u celosti. Zbog toga su, u proteklom periodu, neka od istraživanja u oblasti funkcija posvećena upravo radu na transformacijama funkcija pod uticajem parametara. Kod većine ovih istraživanja ispituje se doprinos primene savremene tehnologije u obradi matematičkih sadržaja koji se odnose na funkcije (Anabousy et al., 2014; Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015; Sever & Yerushalmy, 2007).

2. PROGRAMSKI PAKET GEOGEBRA

Višedecenijski rad na unapređenju kvaliteta spoljašnjih reprezentacija u matematici dobio je novu dimenziju uvođenjem savremene tehnologije kao nastavnog sredstva. Korišćenju tehnologije za ispitivanje višestrukih reprezentacija pridat je veliki značaj u protekle dve decenije (Rau, Michaelis & Fay, 2015; Sever, & Yerushalmy, 2007). Tall (2003) naglašava da računar omogućava korisniku da komunicira na fizički način, pokazujući, označavajući i prevlačeći objekte na ekranu, kako bi što bolje razumeo osobine objekata u stvarnom svetu predstavljenih pomoću posmatranih objekata. Upotreba savremene tehnologije kod formiranja višestrukih reprezentacija doprinosi poboljšanju kvaliteta reprezentacija: razvoju vizuelizacije kroz unapređenje grafičke reprezentacije, kvalitetnijoj algebarskoj reprezentaciji, povezivanju različitih reprezentacija. Naime, postoje softverski paketi koji omogućavaju istovremeni prikaz dve do tri reprezentacije istog objekta. U novije vreme naročito su značajni **dinamički softverski paketi** koji omogućavaju formiranje višestrukih reprezentacija (Hwang & Hu, 2013). Pod dinamičkim softverom se podrazumevaju programski paketi koji omogućavaju korisniku da, menjanjem jedne veličine, istovremeno menja više zavisnih veličina i da prati nastale promene. Oni dinamički paketi koji, pored navedenog, omogućavaju rad sa višestrukim reprezentacijama, dozvoljavaju da promena u jednoj reprezentaciji prouzrokuje istovremenu promenu u ostalim reprezentacijama istog objekta.

Važno je napomenuti da ne spadaju svi softverski paketi koji omogućavaju formiranje višestrukih reprezentacija u red dinamičkih softverskih paketa, niti svi dinamički softverski paketi omogućavaju formiranje višestrukih reprezentacija. Tako, na primer, program Cabri 3D predstavlja dinamički softverski paket, ali omogućava formiranje samo jedne – grafičke reprezentacije. Sa druge strane, kao primer se može navesti program Advanced Grapher, koji omogućava istovremeno formiranje algebarske i grafičke reprezentacije (postoji i mogućnost formiranja tabelarne reprezentacije), ali ne dozvoljava mogućnost transformacije već formiranog objekta, odnosno nema dinamičke osobine. Višestruka reprezentacija predstavlja interaktivnu vizuelnu reprezentaciju dinamičkog objekta, koja omogućava učenicima da manipulišu objektima, odnosno da menjaju jednu osobinu objekta i da istovremeno posmatraju kako promena te osobine utiče na ostale osobine objekta. Navedena mogućnost doprinosi boljem razumevanju osobina posmatranih objekata od strane učenika, naročito kada su u pitanju trodimenzionalni objekti, poput geometrijskih tela, koje je teško predstaviti slikom. Softverski paketi, poput Cabri 3D i GeoGebra, omogućavaju veoma kvalitetnu reprezentaciju geometrijskih tela i njihovih osobina, čak i bolju u odnosu na trodimenzionalne modele geometrijskih tela, jer je broj tela koja se mogu analizirati pomoću trodimenzionalnih modela ograničen. Za uspešnu primenu manipulativnog softvera i virtuelne manipulativne reprezentacije neophodno je da su učenicima i nastavnicima dostupni odgovarajući digitalni nastavni materijali.

Veliki je broj dinamičkih softverskih paketa koji se koriste u nastavi za rad sa višestrukim reprezentacijama, kao što su, na primer, GeoGebra, Wolfram Mathematica i drugi. Zbog svoje dostupnosti, već duži niz godina intenzivno se primenjuje obrazovni softver GeoGebra. Najvažnije karakteristike ovog softvera su sledeće: u isto vreme se pojavljuju dve reprezentacije istog matematičkog objekta, algebarska i grafička, na ekranu u algebarskom i grafičkom prozoru, respektivno. Pored navedenih, GeoGebra omogućava i rad sa tabelarnom reprezentacijom, kao i trodimenzionalni prikaz. Promena kod jedne reprezentacije uzrokuje istovremeno ažuriranje druge. Veliki je broj radova u kojima istraživači izveštavaju o unapređenju učenja matematike, a naročito matematičke analize, korišćenjem obrazovnog softvera GeoGebra (Arzarello, Ferrara, & Robutti, 2012; Doruk, Aktumen, & Aytakin, 2013; Takači et al., 2015).

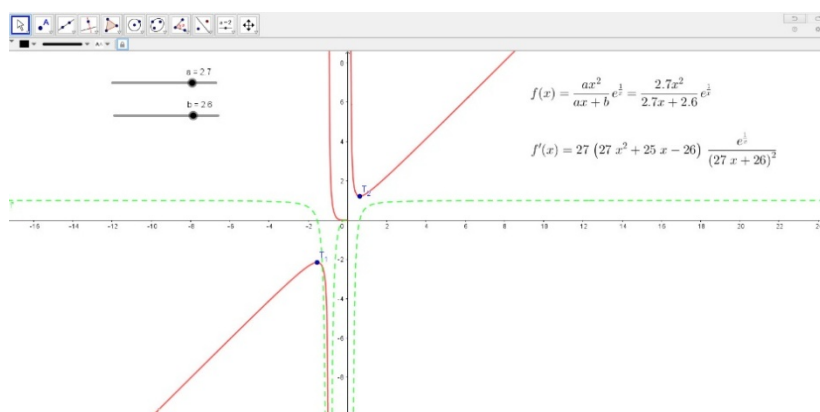
Obrazovni softver GeoGebra ima velike mogućnosti kada je u pitanju predstavljanje i rad sa matematičkim sadržajima. Pored toga, GeoGebra ima još nekoliko važnih osobina:

- Program je blizak korisniku, obuka za njegovo korišćenje je jednostavna, a poseduje i višejezični meni;
- Podstiče učenike da samostalno istražuju, kao i da uče putem eksperimenata i otkrića;
- Omogućava korisniku da podešavanja radnog okruženja prilagođava sopstvenim potrebama;
- Program je kreiran tako da pomaže učenicima da bolje ovladaju određenim matematičkim sadržajima koristeći njegove dinamičke osobine – učenici mogu jednostavno pomerati „slobodne“ objekte na radnoj površini, posmatrajući ih iz različitih uglova, a mogu i, koristeći klizač, menjati vrednosti određene promenljive i posmatrati kako promena ovih vrednosti utiče na osobine zavisnih objekata (objekata koji zavise od navedene promenljive);
- Korišćenje softvera GeoGebra omogućava formiranje radnog okruženja u kome bi klasično predavanje bilo zamenjeno problemski orijentisanom nastavom. Ovaj program je pogodan za rad u problemskim situacijama, jer podstiče učenika na razmišljanje, iznalaženje rešenja i donošenje odluka, ali istovremeno i omogućava, u najvećem broju slučajeva, proveru tačnosti rešenja i sagledavanje eventualnih grešaka, što doprinosi formiranju kvalitetnije unutrašnje reprezentacije;
- GeoGebra je odlično nastavno sredstvo za rad u malim grupama, koji se smatra izuzetno korisnim za uspešno konstruisanje znanja od strane učenika;
- Stimuliše nastavnike da istražuju i unapređuju nastavu matematike, da koriste tehnologiju u cilju vizuelizacije nastavnih sadržaja, kao i da organizuju interaktivnu nastavu i učenje na daljinu.

Ove osobine obrazovnog softvera GeoGebra doprinele su njegovoj popularnosti, pa se on danas sve više koristi, širom sveta, kao nastavno sredstvo u nastavi matematike, od osnovne škole do univerzitetskog nivoa, te kao jedan od najvažnijih alata u radu sa višestrukim reprezentacijama matematičkih sadržaja (Abu Bakar, Mohd Ayub, & Ahmad Tarmizi, 2010). Treba još naglasiti da je GeoGebra besplatan softver, koji se, bez ikakvih ograničenja, može preuzimati i koristiti. Time je omogućeno da ga koriste i obrazovne ustanove, ali i nastavnici i studenti. Takođe, ovaj softver je prilagođen i korisnicima koji nemaju programerske veštine i jednostavan je za korišćenje. Većina učenika se upoznaje sa osnovama rada u GeoGebra okruženju još tokom osnovnog obrazovanja, u okviru predmeta Informatika i računarstvo. Takođe, dostupan je veliki broj nastavnih materijala koji se mogu koristiti kao pomoćna sredstva pri radu u GeoGebra okruženju. Postoji mogućnost da nastavnik kreira aplikaciju pomoću programa GeoGebra, koju bi, po potrebi, mogli koristiti učenici, odnosno studenti koji nisu u dovoljnoj meri ovladali ovim programom. Pored svih navedenih osobina, treba napomenuti da GeoGebra omogućava rad na srpskom jeziku.

GeoGebra je, zbog svojih osobina, veoma pogodna za korišćenje prilikom ispitivanja funkcija. Pored mogućnosti grafičke interpretacije funkcije, postoje i brojne druge mogućnosti, koje se prevashodno odnose na izračunavanje elemenata neophodnih za ispitivanje osobina funkcija. Ovaj softver ima dinamičke osobine i pogodan je za rad sa funkcijama koje sadrže promenljive parametre. Parametre je moguće definisati pomoću klizača, tako da im se, pomeranjem klizača, može menjati vrednost u unapred određenim granicama. Nakon definisanja parametara, korisnik može zadati funkciju unošenjem analitičkog izraza u polje za unos i dobiće istovremeno algebarsku i grafičku reprezentaciju zadate funkcije. Ukoliko želi da posmatra i tabelarnu reprezentaciju, neophodno je samo da otvori odgovarajući prozor i unese željene vrednosti nezavisno promenljive. U daljem radu, može uneti analitičke izraze neophodne za određivanje nula funkcije, ekstremnih vrednosti, itd. Kada u potpunosti završi sa ispitivanjem funkcije, korisnik može, pomeranjem klizača, menjati vrednosti promenljivih parametara i posmatrati na koji način ovi parametri, odnosno njihove vrednosti, utiču na osobine i grafik funkcije. Pomeranje klizača istovremeno dovodi do promena kod svih elemenata koji zavise od parametra definisanog tim klizačem.

Primer grafičke i algebarske reprezentacije funkcije $f(x) = \frac{ax^2}{ax+b} e^{\frac{1}{x}}$, gde su a i b realni parametar definisani pomoću klizača, u GeoGebra okruženju, prikazan je na Slici 1. Funkcija prikazana na Slici 1 je primer funkcije koje se obrađuje na vežbama iz predmeta Matematička analiza 1 na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Na ovom primeru možemo videti da primena višestrukih reprezentacija u dinamičkom okruženju je posebno pogodna za analizu promene osobina funkcije. Tako se, na primer, pomoću klizača mogu definisati parametri a i b , a zatim složena funkcija $f(x) = \frac{ax^2}{ax+b} e^{\frac{1}{x}}$. Nakon toga se može posmatrati kako se funkciji za različite vrednosti parametra a i b menjaju osobine. Dinamička svojstva obrazovnog softvera GeoGebra omogućavaju korisniku da za veoma kratko vreme ispita osobine i analizira grafike velikog broja funkcija iste klase, za šta bi mu, bez ovakvog softvera, odnosno bez upotrebe klizača, trebalo neuporedivo više vremena. Na Slici 1. prikazane su takođe i algebarska i grafička reprezentacija izvoda funkcije, kao i ekstremne vrednosti funkcije (tačke minimuma i maksimuma). Takođe, napominjemo da je dinamičko okruženje posebno pogodno za analizu promene klasa funkcije, odnosno prelaska funkcije iz jedne klase u drugu, naizgled različitu.



Slika 1. Rad sa funkcijom sa parametrima u GeoGebra okruženju.

3. PRIMENA DINAMIČKOG SOFTVERA U RADU SA FUNKCIJAMA

Mogućnosti primene dinamičkog softvera u radu sa funkcijama bile su predmet eksperimentalnog istraživanja, sprovedenog u više faza, u periodu od 2015. do 2018. godine (Božić, R. 2019 - disertacija). Za istraživanje bio je odabran softverski paket GeoGebra. Kroz istraživanje je provereno da li upotreba odabranog softverskog paketa prilikom obrade nastavnih sadržaja vezanih za funkcije, doprinosi poboljšanju kvaliteta znanja studenata o osobinama funkcija i njihovim transformacijama, kao i o uticaju parametara na osobine funkcija i njihovih izvoda. Jedan od ciljeva istraživanja bio je sagledavanje mogućnosti prevazilaženja poteškoća koje studenti imaju u radu sa

funkcijama i transformacijama funkcija, a koje su došle do izražaja prilikom ranijih istraživanja (Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015; Lage & Geisman, 2006; Sever & Yerushalmy, 2007). Takođe je posvećena pažnja uticaju parametara na osobine funkcija i njihovih izvoda. Pre sprovođenja istraživanja, izrađeni su edukativni materijali, koji su omogućili studentima izučavanje osobina i transformacija elementarnih funkcija (nastavni materijali sa aplikacijama izrađenim pomoću dinamičkih softverskih paketa – GeoGebra i Wolfram Mathematica):

- Uticaj dinamičkih osobina softverskih paketa Mathematica i GeoGebra na ispitivanje osobina i crtanje grafika funkcija sa parametrima (Bozic, R. 2015);
- Ispitivanje osobina i crtanje grafika funkcije.

Nakon odabira softverskog paketa GeoGebra koji je bio primenjen u istraživanju, kao i odabira uzorka studenata koji će biti obuhvaćen istraživanjem, utvrđeno je da je **glavni cilj istraživanja** utvrđivanje stepena uticaja primene dinamičkog softvera tokom kolaborativnog rada na kvalitet znanja studenata i razumevanje određenih segmenata nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija, sa posebnim naglaskom na transformacije funkcija. Pored glavnog, ovim istraživanjem su bili postignuti i sledeći ciljevi:

- Implementacija kolaborativnog pristupa potpomognutog korišćenjem računara u nastavni proces;
- Izrađivanje instrumenata (testova znanja) potrebnih u istraživačkom procesu;
- Utvrđivanje stepena uticaja primene dinamičkog softvera na postignuća studenata u oblasti funkcija sa parametrima, kao i znanje studenata o uticaju parametara na osobine funkcije;
- Utvrđivanje stepena uticaja primene dinamičkih višestrukih reprezentacija funkcija i njihovih izvoda na postignuća studenata u oblasti osobina funkcija;
- Sagledavanje na koji način studenti, radeći u kolaborativnim grupama, razmenjuju mišljenja i donose zajedničke odluke i zaključke, a u cilju omogućavanja konstruisanja kvalitetnijeg znanja;
- Sagledavanje na koji način rad u dinamičkom okruženju pomaže članovima kolaborativnih grupa da donesu tačne zaključke o sličnostima i razlikama, te o međusobnoj zavisnosti osobina funkcija srodnih klasa, kao i njihovih izvoda.

Dokazano je da primena dinamičkog obrazovnog softvera GeoGebra u okviru kolaborativnog rada doprinosi boljim postignućima studenata u oblasti transformacija funkcija i uopšte funkcija sa parametrima. Algebarska i grafička reprezentacija funkcije, posmatrane zajedno, kao i dinamičke osobine obrazovnog softvera GeoGebra, omogućavaju kvalitetniji prikaz transformacija funkcija, prouzrokovanih promenom vrednosti parametara, što doprinosi boljem razumevanju, kako transformacija funkcija, tako i uticaja parametara na osobine funkcija od strane studenata.

4. ZAKLJUČAK

Tokom poslednjih decenija, u obrazovnim sistemima širom sveta, urađeno je mnogo na implementaciji savremene tehnologije u nastavni proces. I pored toga, ostalo je dosta prostora za dalje unapređivanje nastavnog procesa primenom novih nastavnih metoda. Kako bi jedan obrazovni sistem bio uspešan, neophodno je da, između ostalog, prati inovacije i razvoj tehnologije, te da, u kontinuitetu, bude usavršavan i prilagođavan potrebama savremenog društva. Potreba za primenom savremene tehnologije izražena je i u matematičkom obrazovanju. U novije vreme se sve više radi na unapređivanju i osavremenjavanju nastave matematike, a primena tehnologije ima vodeću ulogu u tom procesu. Praksa je pokazala da zastupljenost savremene tehnologije u nastavi matematike još uvek nije na zadovoljavajućem nivou. Zbog toga, kao i zbog stalnih inovacija, implementacija tehnologije u nastavu matematike je i dalje važna tema za mnoge istraživače u oblasti matematičkog obrazovanja.

Realne funkcije predstavljaju važan sadržaj u nastavi matematike, naročito u srednjoškolskom i visokom obrazovanju, bez obzira na područje rada i obrazovni profil. Jedan od razloga što se funkcijama pridaje toliki značaj u nastavnim programima matematike jeste njihova rasprostranjena primena u mnogim naučnim oblastima. U novije vreme se naročito stavlja akcenat na izučavanje matematičkog modeliranja, koje se sve više primenjuje u raznim delatnostima. Iz svega navedenog proizilazi i neophodnost da studenti, steknu kvalitetno znanje o funkcijama i njihovim osobinama, kao i o njihovoj primeni. Metodička obrada funkcija se naročito može unaprediti primenom računara, odnosno primenom odgovarajućeg softvera. Rad sa funkcijama u računarskom okruženju bio je predmet brojnih savremenih istraživanja. Budući da su realne funkcije, njihove osobine i primena, predmet izučavanja svih kurseva matematičke analize, odnosno da se izučavaju u okviru gotovo svih studijskih programa u čijim je kurikulumima zastupljena matematika kao nastavni predmet, primena novog metodskog pristupa, može značajno doprineti poboljšanju postignuća studenata kada je u pitanju matematička analiza, odnosno matematika kao nastavni predmet.

U ovom radu, prikazana je primena programskog paketa GeoGebra u nastavi matematike sa ciljem poboljšanja kvaliteta znanja i razumevanja studenata iz oblasti koji se odnose na funkcije, njihovo ispitivanje i osobine. Trogodišnje istraživanje bazirano na doktorskoj disertaciji čiji je autor Božić R. ([5]) pokazalo je opravdanost primene ovog dinamičkog softvera, kako u kolaborativnom, tako i u individualnom radu. Ispitivanjem primene dinamičkih višestrukih reprezentacija, primećena su značajna unapređenja u savladavanju gradiva vezanog za ispitivanje

funkcija i njihove modifikacije u zavisnosti od promene parametara. Osim produbljivanja kvaliteta znanja iz oblasti funkcija, značaj korišćenja programskih paketa u nastavi doprinosi njenom osavremenjivanju i efikasnijoj primeni stečenog znanja u praksi. Izostankom unapređenja praktičnih znanja modernim dostignućima, može doći do znatnog dizbalansa u odnosu na privredu. Stoga je neophodno da nastava bude u tesnoj konekciji sa savremenim tehnologijama.

5. LITERATURA

- [1] Anabousy, A., Daher, W., Baya'a N., & Abu-Naja, M. (2014). *Conceiving function transformations in different representations: Middle school student working with technology*. Mathematics Education, 9 (2), 99-114.
- [2] Abu Bakar, K., Mohd Ayub, A. F., & Ahmad Tarmizi, R. (2010). *Utilization of computer technology in learning transformation*. International Journal of Education and Information Technologies, 4(2), 91-99.
- [3] Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). *Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations*. Teaching Mathematics and Its Applications, 31(1), 20-30.
- [4] Borba, M., & Confrey, J. (1996). *A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment*. Educational Studies in Mathematics, 31: 319-337.
- [5] Božić, R. (2019). *Metodička obrada funkcije sa parametrima uz pomoć računara*. Doktorska disertacija. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet.
- [6] Bozic, R. (2015). *The Impact of Dynamic Properties of the Software Packages Mathematica and GeoGebra to The Examining and Graphing of Functions with Parameters*. European Union: Departemen of Mathematics and Informatics University of Novi Sad, Faculty Of Sciences.
- [7] Daher, W.M., & Anabousi, A.A. (2015). *Students' recognition of function transformations' themes associated with the algebraic representation*. REDIMAT, Vol 4(2), 179-194.
- [8] Doruk, B. K., Aktumen, M., & Aytakin, C. (2013). *Pre-service elementary mathematics teachers' opinions about using GeoGebra in mathematics education with reference to 'teaching practices'*. Teaching Mathematics and Its Applications, 32(3), 140-157.
- [9] Hwang, W. Y., & Hu, S. S. (2013). *Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving*. Computers and Education, Vol. 62, 308-319.
- [10] Lage, A. E., & Gaisman, M. T. (2006). *An analysis of students' ideas about transformations of functions*. In A. S., Cortina, J.L., Sáiz, and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, (Vol. 2, pp. 68-70).
- [11] Rau, M., Michaelis, J., & Fay, N. (2015). *Connection making between multiple graphical representations: A multi-methods approach for domain-specific grounding of an intelligent tutoring system for chemistry*, *Computers and Education*, Vol. 82, 460-485.
- [12] Sever, G., & Yerushalmy, M. (2007). *To sense and to visualize functions: The case of graphs' stretching*. In P. P. Demetra & P. George (Eds.), *The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)* (pp. 1509-1518). Larnaca, Department of Education, University of Cyprus.
- [13] Tall, D. (2003). *Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*, In L. M. Carvalho & L. C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil.
- [14] Takači, Đ., Stankov, G., & Milanović, I. (2015). *Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups*. Computers and Education, Vol. 82, 421-431.