

SAVREMENE METODE REŠAVANJA INŽENJERSKIH ZADATAKA

Miodrag Žigic¹, Nenad Grahovac²^{1,2}Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija¹ mzigic@uns.ac.rs, ² ngraho@uns.ac.rs, ³

Kratak sadržaj: U radu je prikazano rešavanje inženjerskih problema primenom softvera Wolfram Mathematica. Razvojem digitalnih tehnologija pojavile su se nove mogućnosti pri analizi inženjerskih zadataka, pri čemu posebno mesto zauzima Mathematica zbog jednostavnosti primene i velikih mogućnosti za prikazivanje dobijenih rešenja. Pored toga što omogućava numerička izračunavanja, ona predstavlja nezaobilazan alat za simboličko rešavanje i dobijanje rešenja u analitičkom obliku pomoću računara, zahvaljujući ogromnom broju već ugrađenih funkcija, kao i funkcijama koje korisnik sam može da definiše. Zahvaljujući primeni programskog paketa Mathematica omogućeno je rešavanje kompleksnih inženjerskih problema, vreme potrebno za rešavanje se znatno skraćuje, a imponentne grafičke mogućnosti doprinose boljem i lakšem razumevanju dobijenih rešenja.

Ključne reči: Mathematica, inženjerstvo, simboličko i numeričko rešavanje

MODERN METHODS FOR SOLVING ENGINEERING PROBLEMS

Abstract: In this paper we present solutions of some engineering problems by application of Wolfram Mathematica software. With the development of digital technologies new possibilities for engineering problems analysis have appeared. One of the most important digital tools is Mathematica mostly due to its simple use and huge number of options for the presentations of the obtained solutions. It is not only that it enables numerical calculations but it also represents an inevitable tool for symbolic calculations and obtaining of the results in analytical form by the use of a computer, mainly thanks to numerous built-in functions as well as user-defined functions. By the application of Mathematica software complex engineering problems can be solved, it takes far less time to find the solution and what is more, outstanding graphic possibilities contribute to better and easier understanding of obtained results.

Key Words: Mathematica, engineering, symbolic and numeric computation

1. UVOD

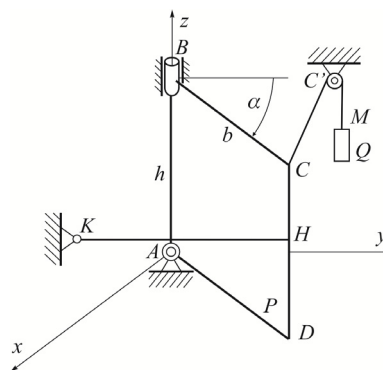
Za buduće inženjere je od velike važnosti da razviju kritički način razmišljanja i da budu osposobljeni da problem postave, reše, analiziraju i protumače dobijena rešenja. Opšte je poznato da je studentima inženjerske struke potrebno prvo preneti osnovna tehnička znanja kroz predmete u okviru kojih se uči mehanika krutog i deformabilnog tela, mehanika kontinuuma i mehanika materijala. Osnovni zadatak nastavnika jeste da im prenese potrebna znanja i veštine za savladavanje tog osnovnog gradiva kako bi imali kasnije mogli lakše da savladaju gradivo iz usko stručnih predmeta vezanih za bilo koju inženjersku struku.

Rešavanje današnjih inženjerskih zadataka ne bi moglo da se zamisli bez savremenih alata u obliku specijalizovanih programskih paketa. Razvojem softverskih alata za simboličko i numeričko računanje, matematičarima, fizičarima i inženjerima je jednostavno nametnut moderan način rada, provere i analize. Jedan od takvih softverskih paketa koji zbog jednostavnosti korišćenja, rasprostranjenosti, podrške, velikog broja raznih mogućnosti zasluhuje da bude pomenut je *Wolfram Mathematica*. Korišćenje softverskog paketa *Mathematica* radi poboljšanja kvaliteta nastave mehanike, kao i za rešavanje i analizu složenih inženjerskih problema je prikazano u radovima [1] i [2]. Primena softverskog paketa *Mathematica* u izabranim primerima koji se predaju studentima Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu iz mehanike prikazana je u sledećoj sekciji.

2. PRIMERI ZADATAKA MEHANIKE REŠENIH POMOĆU MATHEMATICE

U ovom delu biće prikazano rešenje tri primera u kojima će biti prikazane mogućnosti *Mathematice* za simboličko rešavanje sistema algebarskih jednačina, zatim simboličko i numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina.

Prvo će biti prikazano simboličko rešavanje jednačina ravnoteže problema prikazanog na Slici 1. Vektori će biti predstavljeni korišćenjem listi, čija upotreba je veoma pogodna za ovu svrhu, kao i za određivanje reakcija veza. U primeru je potrebno odrediti reakcije veza homogene pravougaone ploče *ABCD* težine *P*, koja je vezana sfernim zglobovom u tački *A* i cilindričnim zglobovom u tački *B*. Ploču u položaju ravnoteže održavaju dva užeta, uže *CM* koje je prebačeno preko kotura i za čiji kraj *M* je zakačen teret težine *Q*, i uže *HK* koje je paralelno osi *y*, pri čemu je *K* nepokretna tačka, $BC=BC'$. Dužina $AB=h$, $BC=b$, $DH=HC$, ugao $\alpha=30^\circ$, $b=1\text{m}$, $h=3\text{m}$, [3].



Slika 1. Primer na kojem je predstavljeno simboličko rešavanje algebarskih jednačina

Prilikom rešavanja ovog zadatka ustanovljeno je da na ploču od aktivnih sila deluje težina ploče, a od reakcija veza prisutna je reakcija u sfernom zglobu A čije su projekcije na koordinatne ose XA , YA , ZA , reakcija u cilindričnom zglobu sa projekcijama XB i YB , sila $S_1 = S_1 \mu$ u užetu koje je prebačeno preko kotura, pri čemu je $S_1 = Q$, a μ je jedinični vektor usmeren od C ka A, i sila S_2 u užetu HK. *Mathematica* omogućava definisanje vektora i matrica kao i izvođenje operacija sa njima i u simboličkom i u numeričkom obliku. Zbog toga vektorski pristup rešavanju ovog problema omogućava da se uslovi ravnoteže $G=0$ i $M_A=0$ direktno primene u vektorskom obliku, što rešavanje čini kraćim i bržim, [4].

Sile čije su projekcije usmerene u pravcima koordinatnih osa definisane su pomoću listi sa po tri elementa, gde svaki element označava projekciju vektora na jednu koordinatnu osu, a sila u užetu S_1 definisana je kao proizvod svog intenziteta i jediničnog vektora μ . Momenti tih sila za tačku A predstavljani su pomoću vektorskih proizvoda

$$\begin{aligned} RA &= \{XA, YA, ZA\}; & MRA[A] &= 0 \\ RB &= \{XB, YB, 0\}; & MRB[A] &= AB \times RB \\ S[2] &= \{0, -S2, 0\}; & MS1[A] &= AC \times S[1] \\ P &= \{0, 0, -P\}; & MS2[A] &= AH \times S[2] \\ S[1] &= Q \mu & MP[A] &= AT \times P \end{aligned}$$

Slika 2. Sile i momenti u vektorskom obliku

za šta je bilo potrebno prethodno definisati vektore položaja AB , AC , AH i AT , AC' na opisani način, dok je jedinični vektor μ izračunat kao $\mu = (AC' - AC) / |AC' - AC|$. Sada se formiraju uslovi ravnoteže

$$\begin{aligned} \text{GlavniVektorJeNula} &= RA + RB + P + S[1] + S[2] == \{0, 0, 0\} \\ \text{GlavniMomentZaTackuAJeNula} &= MRA[A] + MRB[A] + MS1[A] + MS2[A] + MP[A] == \{0, 0, 0\} \end{aligned}$$

Slika 3. Uslovi ravnoteže

Ovako postavljene jednačine rešavaju se pomoću komande SOLVE

$$\begin{aligned} \text{Resenje} &= \text{Solve}[\{\text{GlavniVektorJeNula}, \text{GlavniMomentZaTackuAJeNula}\}, \\ &\quad \{XA, YA, ZA, XB, YB, S2\}] \\ &= \left\{ \left\{ XA \rightarrow \frac{P}{12}, YA \rightarrow \frac{P}{4\sqrt{3}} + \frac{Q}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}, ZA \rightarrow P, XB \rightarrow -\frac{P}{12} + \frac{Q}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. YB \rightarrow -\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{12\sqrt{2-\sqrt{3}}} P + \frac{6Q-6\sqrt{3}Q}{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}, S2 \rightarrow \frac{Q}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Slika 4. Simboličko rešavanje sistema algebarskih jednačina postavljenih u vektorskom obliku

čime su određene reakcije veza. Ako bi se u rešenje uvrstile brojne vrednosti veličina P i Q , dobile bi se numeričke vrednosti reakcija veza.

Drugi primer se odnosi na problem kretanja tačke u sredini sa otporom gde je otporna sila linearna funkcija brzine materijalne tačke, a k figuriše u koeficijentu proporcionalnosti. Tačka kretanje započinje iz koordinatnog početka brzinom v_0 koja sa horizontalom gradi ugao α , [5]. Kretanje tačke je opisano običnom diferencijalnom jednačinom čije će analitičko rešenje biti prikazano u nastavku. Komanda DSolve se koristi za analitičko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina i njen primena u ovom primeru je prikazana na Slici 5.

```
In[1]:= DSolve[{x'[t] == -k g x'[t], y'[t] == -k g y'[t] - g},
  {x[t], y[t]}, t] // Simplify

Out[1]:= {{x[t] -> -\frac{e^{-g k t} C[1]}{g k} + C[2], y[t] -> -\frac{g t + e^{-g k t} C[3]}{g k} + C[4]}}
```

Slika 5. Primena komande DSolve za rešavanje obične diferencijalne jednačine

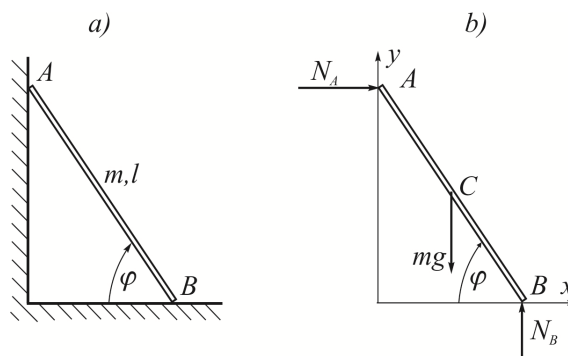
gde su C[1], C[2], C[3] i C[4] konstante integracije koje se mogu odrediti iz početnih uslova. One se mogu odrediti uvrštavanjem početnih uslova direktno u komandu DSolve kao što je prikazano na sledećoj slici.

```
In[2]:= resenje =
  DSolve[{x'[t] == -k g x'[t], y'[t] == -k g y'[t] - g, x[0] == 0,
    y[0] == 0, x'[0] == v0 Cos[α], y'[0] == v0 Sin[α]}, {x[t], y[t]}, t]

Out[2]:= {{x[t] -> \frac{1}{g k} e^{-g k t} (-1 + e^{g k t}) v0 Cos[α], y[t] ->
  -\frac{1}{g k^2} e^{-g k t} (1 - e^{g k t} + e^{g k t} g k t + k v0 Sin[α] - e^{g k t} k v0 Sin[α])}}
```

Slika 6. Rešenje kosog hica u analitičkom obliku uz primenu početnih uslova u okviru komande DSolve

Treći primer se odnosi na mehanički sistem prikazan na Slici 7a, koji je opisan u nastavku, izvedene su diferencijalne jednačine kretanja, koje su zatim rešene numerički, i analizirano je njihovo rešenje, [4].



Slika 7. Ravno kretanje štapa AB

Štap AB mase m i dužine l oslanja se krajem A na glatki vertikalni zid a krajem B na glatku horizontalnu podlogu. Štap započinje kretanje iz stanja mirovanja, pri čemu ugao φ , koji štapić gradi sa horizontalom, u početnom trenutku iznosi φ_0 . Napisati diferencijalne jednačine kretanja u formi Njutn-Ojlerovih jednačina i odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa, kao i ugao φ u trenutku odvajanja štapa od zida.

Prvo su napisane Njutn-Ojlerove jednačine za kretanje štapa koje su prikazane na Slici 8 i u kojima figurišu reakcije veze u tačkama A i B .

$$\begin{aligned} m \left(-\frac{1}{2} l \cos[\varphi[t]] \varphi'[t]^2 - \frac{1}{2} l \sin[\varphi[t]] \varphi''[t] \right) &= N_A \\ m \left(-\frac{1}{2} l \sin[\varphi[t]] \varphi'[t]^2 + \frac{1}{2} l \cos[\varphi[t]] \varphi''[t] \right) &= -g m + N_B \\ \frac{1}{12} l^2 m \varphi''[t] &= -\frac{1}{2} l N_B \cos[\varphi[t]] + \frac{1}{2} l N_A \sin[\varphi[t]] \end{aligned}$$

Slika 8. Njutn-Ojlerove jednačine kretanja štapa AB

Za određivanje ugla odvajanja Traženo ugaono ubrzanje i reakcije veze u tačkama A i B se dobijaju rešavanjem sistema algebarskih jednačina sa Slike 8 pomoću komande Solve kao što je prikazano na Slici 9. Kretanje štapa definisano je funkcijom $\varphi(t)$, koja može da se odredi rešavanjem diferencijalne jednačine po φ koja je prikazana na Slici 9. U pitanju je nelinearna diferencijalna jednačina koja se može rešiti numerički zadavanjem vrednosti parametara sistema pomoću komande NDSolve. Pored toga, ona se može rešiti numerički i bez zadavanja vrednosti parametara unapred, pomoću komande ParametricNDSolve što će biti urađeno u ovom primeru. Dobija se numeričko rešenje koje zavisi od odabranih parametara: početne vrednosti ugla φ i dužine štapa l , videti Sliku 10.

```
res = Solve[{j1, j2, j3}, {φ'[t], NA, NB}] // Simplify
```

$$\left\{ \left\{ \varphi''[t] \rightarrow -\frac{3 g \cos[\varphi[t]]}{2 l}, \right. \right.$$

$$NA \rightarrow -\frac{1}{4} m \cos[\varphi[t]] (3 g \sin[\varphi[t]] - 2 l \varphi'[t]^2),$$

$$NB \rightarrow -\frac{1}{8} m (g (-5 + 3 \cos[2 \varphi[t]]) + 4 l \sin[\varphi[t]] \varphi'[t]^2) \left. \right\}$$

Slika 9. Ugaono ubrzanje štapa i reakcije veze u tačkama A i B

Prednost ovako dobijenog numeričko rešenje je što se može prikazati za različite vrednosti parametara sistema l i $\varphi(0)$, bez da se diferencijalna jednačina ponovo rešava za svaku vrednost parametra. Naime, koristi se dobijeno numeričko rešenje i samo se menjaju željeni parametri, za detalje i korišćenje komande Plot za grafički prikaz dobijenog rešenja videti [4].

```
NumRes = ParametricNDSolve[
  {φ''[t] == - (3 g Cos[φ[t]]) / (2 l), φ[0] == φ0, φ'[0] == 0} /. g -> 9.81,
  φ, {t, 0, 1}, {φ0, 1}]

{φ -> ParametricFunction[
  {
    Expression: φ
    Parameters: {φ0, l}
  }
]}
```

Slika 10. Određivanje ugla φ pomoću komande ParametricNDSolve

Ugao pri kojem dolazi do odvajanja štapa od zida može se odrediti korišćenjem uslova da je reakcija u tački A u tom položaju štapa jednaka nuli. Iz rešenja sa Slike 11 se vidi da ugao odvajanja zavisi od početne vrednosti ugla φ .

```
Solve[
  0 == NA /. res[[1]] /. φ'[t] -> Sqrt[(3 g / l) (Sin φ0 - Sin[φ[t]])], Sin[φ[t]]]

{{Sin[φ[t]] -> (2 Sin φ0) / 3}}
```

Slika 11. Određivanje ugla odvajanja

Navedeni primeri imali su za cilj da pokažu kako se softver *Mathematica* mogu koristiti za rešavanje inženjerskih zadataka u nastavi mehanike.

3. ZAKLJUČAK

Pomoću prikazanih primera koji se mogu koristiti u nastavnom procesu predstavljene su samo neke od brojnih mogućnosti programskog paketa *Mathematica* koje mogu unaprediti izvođenje nastave iz Mehanike i to tako što će softver koristiti za izračunavanja (simbolička ili numerička) pa će nastavnik imati više vremena za objašnjavanje postavke problema, zapisivanje osnovnih jednačina problema kao i tumačenje dobijenih rezultata.

Istraživanje je podržano od strane Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, Projekat broj 2020-054 (Primene novih IT tehnologija u nastavi mehanike).

4. LITERATURA

- [1] Miodrag Zuković, Ivana Kovačić, Livija Cvetičanin, *O korišćenju programskog paketa Wolfram Mathematica za unapređenje razumevanja mehanike kod studenata mašinskog inženjerstva*, XXV Skup Trendovi razvoja: Kvalitet visokog obrazovanja, Kopaonik, 11.-14. 02.2019.
- [2] Nenad Grahovac, Miodrag Žigić, *Analiza i simulacije u inženjerstvu primenom softverskog paketa Mathematica*, XXV Skup Trendovi razvoja: Kvalitet visokog obrazovanja, Kopaonik, 11.-14. 02.2019.
- [3] K. S. Kolesnikov, *Zbirka zadataka iz teorijske mehanike* (na ruskom jeziku), Nauka, Moskva, 1989.
- [4] Miodrag Žigić, Nenad Grahovac, *Mathematica u zadacima mehanike*, Fakultet Tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, Srbija, 2019.
- [5] Dragan T. Spasić, *Mehanika (osnove, opšte i proširenja)*, Fakultet Tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, u pripremi.