

ZNAČAJ KOMBINATORNE OPTIMIZACIJE IT-POLJU KAO VAŽNE PRIVREDNE GRANE

Rade Doroslovački

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija
doros953@gmail.com

Kratak sadržaj: Cilj ovoga rada je da zaintrigira mlade istraživače da neprekidno razmišljaju o optimizaciji u svim domenima njihovoga rada. U nameri da se ukaže na izuzetan značaj optimizacije algoritama i raznih procedura značajnih u mnogim privrednim granama izložiće se doprinosi kombinatorike u tom procesu. Izuzetno je korisno da se u okviru obrazovanja u osnovnim i srednjim školama, u studentskim programima na fakultetima i u naučnim radovima što više angažuje razvoj na kombinatorici. To će doprineti optimizaciji u širem smislu i time značajno doprineti privrednoj grani IT koja je kod nas u velikoj ekspanziji i očekuje se još veća. Bez podrške ozbiljnog znanja iz kombinatorike to ne može biti dovoljno efikasno.

Ovaj značaj **kombinatorike** biće interpretiran kroz nekoliko jednostavnih primera iz kojih se vidi i put kako se to dalje može proširivati i usavršavati. Poznata je važnost skraćivanja računarskog vremena u rešavanju problema. Nekada postoji tačno rešenje problema, ali računarsko vreme je toliko veliko da od toga rešenja nemamo nikakve koristi. Napomenimo da nije jedino kombinatorika grana matematike koja rešava ove optimizacije i skraćivanje računarskog vremena. Tu su veoma ozbiljne grane matematike **numerička linearna algebra-NUMELA** i **linearno programiranje**. Postoje i druge oblasti koje takođe daju doprinose ovim optimizacijama.

Ovde ćemo se pozabaviti problemima raspoređivanja objekata (koji se razlikuju, kao i onih koji se ne razlikuju) u neke kutije, koje se mogu razlikovati ali i ne razlikovati. Videće se da tu učestvuju svi osnovni kombinatorni principi kao što su:

1. Princip množenja,
2. Princip zbira,
3. Princip bijekcije
4. Dirihleovi principi
5. Princip uključenja-isključenja.

Već samo na osnovu ovih principa u ozbiljnom posvećenom radu mogu se postići mnogi rezultati u optimizaciji. Naravno da korišćenjem još obilnijeg matematičkog aparata kao što je teorija grupa, faktor grupe, izomorfizmi faktor grupa, između geometrijskih i algebarskih objekata, dobija se još mnogo više ozbiljnijih rezultata.

Kroz jednostavne primere prikazaće se kako se prebrojavanje i generisanje nekih particija skupova, odnosno dobijanja nekih Stirlingovih brojeva, može dobiti na optimalni način, iako postoji više načina za njihovo prebrojavanje i generisanje.

Retki su **netrivijalni** algoritmi koji su optimalni i za koje postoji dokaz da su optimalni.

Ključne reči: Particije skupova/Stirlingovi brojevi

IMPORTANCE OF COMBINATORY OPTIMIZATION IN IT INDUSTRY, ESSENTIAL PART OF ECONOMY

Abstract: The aim of this paper is to intrigue young researchers to constantly think about optimization in all areas of their work. In order to point out the exceptional importance of optimization of algorithms and various procedures important in many industries, the contribution of combinatorics in this process will be presented. It is extremely useful to engage in combinatorial development as much as possible within the framework of education in primary and secondary schools, in study programs at faculties and in scientific papers. This will contribute to optimizations in a broader sense and thus significantly contribute to the IT industry, which is in great expansion in our country and it is expected to be even bigger. Without support of serious knowledge of combinatorics, this cannot be efficient enough.

This significance of combinatorics will be interpreted through several representative examples, which show the way in which it can be further expanded and improved. The importance of shortening computer time in solving problems is well known. Sometimes there is an exact solution to a problem, but computer time is so great that we have no use of that solution. Note that it is not only the combinatorics branch of mathematics that solves these optimizations and shortens computer time. There are very serious branches of mathematics for optimizations, **numerical linear algebra-NUMELA** and **linear programming**.

There are also a number of areas that can contribute to these optimizations.

Here we will deal with the problems of arranging objects (which differ, as well as those that do not differ) into some boxes, which may or may not differ. All basic combinatorial principles will be involved, such as:

1. Multiplication
2. Addition
3. Bijection
4. Dirichlet's principle
5. Inclusion-exclusion principle.

Many optimization results can be achieved only on the basis of these principles in serious dedicated work. Of course, by using an even more abundant mathematical apparatus such as group theory, factor groups, isomorphisms factor groups, between geometric and algebraic objects, much more serious results can be obtained.

Simple examples will show how counting and generating some partition sets, i.e. obtaining some Stirling numbers, can be obtained in an optimal way, although there are several ways to count and generate them.

Rare are non-trivial algorithms that are optimal and for which there is evidence that they are optimal.

Key Words: Set partitions / Stirling numbers

1. UVOD

Prikazaćemo na dva načina generisanje i prebrojavanje svih particija skupa $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ na tri podskupa od kojih svaki ima tačno tri elementa i ti podskupovi nemaju zajedničkih elemenata tj. disjunktni su. Evo nekoliko primera tih particija skupa A na tri tročlana podskupa:

$$\begin{aligned} &\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}\} \\ &\{\{1,2,4\}, \{3,5,6\}, \{7,8,9\}\} \\ &\{\{1,2,5\}, \{3,4,6\}, \{7,8,9\}\} \\ &\{\{1,2,6\}, \{3,4,5\}, \{7,8,9\}\} \\ &\{\{1,2,7\}, \{3,4,5\}, \{6,8,9\}\} \text{ itd. } 280 \text{ načina} \end{aligned}$$

Prvi način generisanja je odabir 3 elementa od 9 elemenata, a zatim se bira opet tri elementa ali od 6 elemenata što se može učiniti na $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\frac{1}{3!} = 280$ načina jer u onih $\binom{9}{3}\binom{6}{3}$ načina svaki se pojavljuje $3! = 6$ puta, a to su one permutacije ona tri tročlana podskupa u skupu kome pripadaju. Znači da u algoritmu generisanja kombinacija bez ponavljanja $\binom{9}{3}$ i $\binom{6}{3}$ moramo da uvek proveravamo da li je ta mogućnost već dobijena i ako jeste odbacujemo je, a ako nije zadržavamo je. Da li je moguće konstruisati takav algoritam da ne postoje ponavljanja pa se ne mora proveravati da li je ta mogućnost već dobijena. Ako se konstruiše takav algoritam, onda će on biti optimalan. Evo tog algoritma. Element 1 se mora nalaziti u nekom od ta tri tročlana podskupa. Nazovimo taj podskup kao skup u kome se nalazi element 1 i označimo ga sa A_1 . Podskup A_1 se može formirati na $\binom{8}{2}$ načina, jer se u njemu već nalazi element 1 i treba odabrati još samo dva elementa ali samo od preostalih osam elemenata, kako je element 1 već uzet. Nakon toga treba formirati drugi tročlani podskup. Ako posmatramo (fiksiramo) neki od onih $\binom{8}{2}$ podskupa A_1 vidimo da su iskorišćena neka tri elementa među kojima je i element 1. Od **preostalih šest** elemenata fiksirajmo neki, na primer α i biramo sve tročlane podskupove u kojima se nalazi element α od sada preostali samo 5 elemenata i to ne utiče na opštost jer se element α mora nalaziti u nekom od podskupova. Njih će biti $\binom{5}{2}$ jer od devet elemenata tri su već u skupu A_1 i element α je već uzet, pa je ostalo samo pet neupotrebljenih elemenata. Kako svaka od mogućnosti $\binom{8}{2}$ ide sa svakom od mogućnosti $\binom{5}{2}$ to je ukupan broj svih mogućnosti $\binom{8}{2}\binom{5}{2}$. Iz ova dva načina prebrojavanja svih skupova od tri tročlana podskupa skupa $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ koji nemaju zajedničkih elemenata, sledi jednakost

$$\binom{9}{3}\binom{6}{3}\frac{1}{3!} = \binom{8}{2}\binom{5}{2}$$

Međutim iz drugog načina prebrojavanja, kojim smo dobili rezultat $\binom{8}{2}\binom{5}{2}$ sledi da poznati algoritam generisanja kombinacija bez ponavljanja daje direktno sve različite odnosno nove mogućnosti, što znači da nema ponavljanja mogućnosti te je ovaj algoritam optimalan.

Ako bi se pravile sve particije skupa A na tri podskupa, tada za broj elemenata tih podskupova postoje mogućnosti **117, 126, 135, 144, 225, 234, 333**. Primer koji smo mi uradili je 333 jer u našem slučaju svaki od tri podskupa je imao po 3 elementa. Kad su u pitanju slučajevi 126, 135, 234 odnosno kad sva tri podskupa imaju različit broj elemenata tada sigurno neće biti ponavljanja u generisanju i rezultatati su

$$\binom{9}{6}\binom{3}{2}, \binom{9}{5}\binom{4}{3} \text{ i } \binom{9}{4}\binom{5}{3}$$

U slučaju 117 takođe neće biti ponavljanja jer su dva podskupa jednočlana i rezultat je $\binom{9}{7}$. U slučajevima 144 i 225 samo dva podskupa imaju isti broj elemenata pa će se tu svaka mogućnost pojavljivati $2! = 2$ puta i tu sad imamo dva algoritma i na izgled dva rezultata odnosno ispravne jednakosti

$$\binom{9}{4} \binom{5}{4} \frac{1}{2!} = \binom{9}{1} \binom{7}{3}$$

i

$$\binom{9}{5} \binom{4}{2} \frac{1}{2!} = \binom{9}{5} \binom{3}{1}$$

i na kraju slučaj 333 koji smo uradili. Prema tome najbrži algoritam za konstruisanje svih tročlanih podskupova skupa A jeste prema algoritmu računanja njihovog broja na opisane načine a to je

$$\begin{aligned} S_3^9 &= \binom{9}{7} + \binom{9}{6} \binom{3}{2} + \binom{9}{5} \binom{4}{3} + \binom{9}{1} \binom{7}{3} + \binom{9}{5} \binom{3}{1} + \binom{9}{4} \binom{5}{3} + \binom{8}{2} \binom{5}{2} \\ &= 36 + 252 + 504 + 315 + 378 + 1260 + 280 = 3025 \end{aligned}$$

Ovaj zbir je Stirlingov broj S_3^9 . Prema tome ovim je dat i optimalni algoritam za generisanje svih particija skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na tri podskupa kojih ima Stirlingov broj S_3^9 . Broj **svih** particija skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ je jednak zbiru Stirlingovih brojeva $S_1^9 + S_2^9 + S_3^9 + S_4^9 + S_5^9 + S_6^9 + S_7^9 + S_8^9 + S_9^9$ a to je jednako broju svi relacija ekvivalencije devetočlanog skupa. Na taj način dolazimo i do optimalnog algoritma generisanja svih relacija ekvivalencija devetočlanog skupa, kao i svih surjektivnih funkcija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na skup $\{1, 2, 3\}$, kojih ima $S_3^9 \cdot 3! = 3025 \cdot 6 = 18150$. Na drugi način, korišćenjem formule uključenja-isključenja

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

dobija se

$$S_3^9 \cdot 3! = \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} (-1)^{i+3} i^9 = \binom{3}{1} 1^9 - \binom{3}{2} 2^9 + \binom{3}{3} 3^9 = 18150$$

2. UOPŠTENJE

Međutim očevitna je generalizacija ako pravimo particiju skupa od $3n$ elemenata na tri disjunktna podskupa koji svaki ima n elemenata da je rezultat

$$\binom{3n}{n} \binom{2n}{n} \frac{1}{3!} = \binom{3n-1}{n-1} \binom{2n-1}{n-1}$$

I u ovom uopštenju optimalni algoritam konstruisanja skupa podskupova će biti onaj po kojem smo dobili rezultat

$$\binom{3n-1}{n-1} \binom{2n-1}{n-1}$$

Odnosno opet pravimo podskup u kome je na primer element 1. Njih ima $\binom{3n-1}{n-1}$ podskupova. Zatim fiksiramo neki od tih podskupova i fiksiramo neki element koji nije u tom fiksiranom podskupu. Sad je preostalo $3n - n - 1 = 2n - 1$ elemenata za konstruisanje drugog podskupa u koji stavljamo onaj fiksirani element pa treba odabrati još samo $n - 1$ elemenata, a to se može učiniti na $\binom{2n-1}{n-1}$ načina.

3. JOŠ NEKI PRIMERI

Poznato je da bi se pomnožila dva kompleksna broja treba izvršiti 4 množenja realnih brojeva što se vidi iz

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

i to su množenja ac, bd, ad, bc . Pitanje je da li se množenje dva kompleksna broja može izvršiti samo sa 3 množenja realnih brojeva? Zašto je to interesantno? Zato što je poznato da računarsko vreme množenja je veće od računarskog vremena sabiranja, pa u cilju optimizacije celishodno je smanjivati broj množenja na račun sabiranja. Odgovor na postavljeno pitanje je MOŽE i sledi iz jednakosti

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc) = ac - bd + i((a + b)(c + d) - ac - bd)$$

Jer tu postoje samo tri množenja realnih brojeva i to su $ac, bd, (a + b)(c + d)$.

Iz pravila za množenje matrica reda 3 (tri vrste i tri kolone) sledi da svaki elemenat proizvoda dve matrice reda 3 se dobija pomoću tri množenja brojeva, a kako postoji 3^2 elemenata matrice to sledi treba izvršiti 3^3 množenja brojeva. Za matrice reda n trebalo bi n^3 množenja brojeva. Pitanje je da li se može izvršiti množenje dve matrice reda n sa manje od n^3 množenja brojeva. Odgovor je potvrđan.

4. ZAKLJUČAK

Kao što su se u ovim primerima mogle izvršiti optimizacije, tako se mogu izvršiti optimizacije i u mnogobrojnim primerima, što stalno treba imati na umu i raditi na tome. Kombinatorika je jedan od moćnih alata koji mogu mnogo doprineti u raznim optimizacijama. Zbog toga je izuzetno važno da se u nekim studentskim programima ubacuju sadržaji iz kombinatorike.

Kao što je već navedeno i numerička linearna algebra daje izuzetne doprinose u optimizacijama, tako da i sadržaje numeričke linearne algebra treba ubacivati u neke studentske programe kao i linearno programiranje.

Treba imati u vidu da je optimizacija bitna u svim privrednim granama a ne samo IT oblasti, a kombinatorika je jedana od nezobilaznih metoda u tim optimizacijama.

Zahvaljujem se projektu: **Primena opštih disciplina u tehničkim i informatičkim naukama**, koji je omogućio izradu ovoga rada.

5. LITERATURA

- [1] Doroslovački Rade, *Algebra*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad.
- [2] John M. Harris, Jeffry L. Hirst, Michael J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, Springer